SDS-14

ノイズを含む多次元非定常時系列への新しいフィルタリング法と応用

国友直人

February 2020

Statistics & Data Science Series back numbers:
http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/datascience.html

ノイズを含む多次元非定常時系列への新しいフィルタリング法と応用

国友直人

明治大学

2020 年 1 月

2020 年 1 月 11 日「関西計量経済研究会」(一橋大学) における講演内容。
佐藤整尚氏との共同研究 Kunitomo-Sato (2019), Kunitomo-Awaya-Kurisu (2019, published), Kunitomo-Sato (2017) に基づく (基本的アイデアは高頻度データに関する研究をまとめた Kunitomo, Sato and Kurisu(2018, Springer) にある)。研究への高橋明彦氏からの示唆に感謝する。

Outline

研究の動機

マクロ経済データの例

非定常変数誤差モデル

$\mathbf{K}_n$ 変換と $\mathbf{Z}_n$ 過程

データの直交分解

フィルタリング法

実例と展望

非共和分・共和分 I(1) 時系列の推定

まとめと展望

研究の動機

- 多くのマクロ経済データにおいては非定常性、季節性、定常的な循環、観測ノイズなどがしばしば観察される。例えば GDP 統計の季節調整・複数系列の合成 (内閣府)、複数のマクロ消費系列から月次合成指標 (統計局) などについて幾つかの問題がある。
- 政府統計で広く利用されている季節調整法の X-12-ARIMA では一次元 Box-Jenkins 法 (Reg-ARIMA モデル) が古典的な移動平均法 (Moving Average) とともに (十分な理解があるといえない中でも) 広く利用されている。
- 統計数理研究所で開発された赤池・石黒の BAYSEA、北川の DECOMP（Kitagawa(2010)）においてはガウス尤度関数に基づくカルマン・フィルタリングにより 1 次元時系列の成分分解が実用化されている。多次元化はかなり困難。高次元の分解 はかなり困難.

- Econometrics では Hodorick-Prescot (1997), Baxer-King (1999) が知られているが、前者は Decomp において d=2, 分散比を適当に設定と解釈可能 (see Harvey-Trimbur (2009))。後者の両側対称移動平均 (Band-Path-Filter) はアドホック側面があるが、SIML フィルター (後述) と関係あり。
- Muller-Watson (2018) は Kunitomo-Sato (2017, unpublished) の特別な場合における効率的でない推定法と解釈が可能。SIML フィルターに基づく SIML 推定は一般に consistent となる.

- 多くのマクロ時系列では全く同一ではないが似たような季節性や (景気) 循環変動などの共変動が観察されている。Engle-Granger(1987) では非定常系列においてVAR(vector AR) による共和分 (co-integration) 分析を提唱しているが、(現実的な) 季節性や観測ノイズの存在は無視している。
- Co-integrated processes は興味深いが、現実の時系列には制約的すぎないだろうか。例えば厳密に co-integrate してないと、co-integrated 状態に近い場合でも従来のかなりの議論が破綻する。(回帰係数の一致性 etc.) ここで重要なのは非定常多次元データ間の関係を損なわないフィルタリング方法が必要なこと。
  実例

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,t} + \beta x_{2,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \end{pmatrix}.$$

- 四半期データ (20 年) では 80、月次データでは 120 程度の時系列データを想定、時系列としては小標本データである。
- 他方、Kunitomo, N. , Sato and D. Kurisu (2018) では金融高頻度データ分析において**分離最尤推定法**を提案している。（*Separating Information Maximum Likelihood Estimation for High Frequency Financial Data*, Springer）本稿で提唱する方法は SIML をマクロ (離散時間) 時系列に発展させた方法と理解できる。
- 本稿では多次元非定常時系列がしたがう分布にほぼ依存しない**新しいフィルタリング法**を開発したので報告する。応用可能性は広範に及ぶと判断している。例えばトレンド抽出、トレンド間の回帰、季節調整、季節性間の分析、などの問題が実例である。マクロ消費に関する実験的分析結果にも言及する。

マクロ経済データの例

マクロ経済データとして重要な系列である実質 GDP と実質消費の二次元時系列、マクロ消費系列の三系列を例として議論する予定。

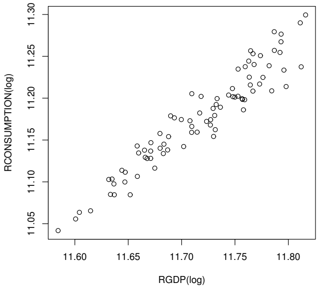

図 2.1 : 実質 GDP vs. 実質消費

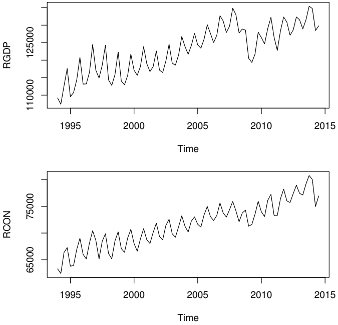

図 2.2： 実質 GDP vs. 実質消費

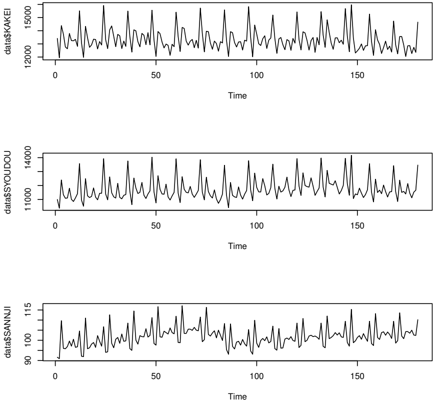

図 3.1： マクロ消費 3 系列

非定常変数誤差モデル

簡単な離散時間の変数誤差モデル

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \ \ (i = 1, \cdots, n),$$

を考察する。ここで $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ は非定常 $\mathrm{I}(1)$ 過程であり

$$\Delta \mathbf{x}_i = (1 - \mathcal{L})\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i^{(x)}$$

ラグ作用素 $\mathcal{L}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$, $\Delta = 1 - \mathcal{L}$,

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(v)} \mathbf{e}_{i-j}^{(v)} ,$$

$$\mathbf{v}_i^{(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(x)} \mathbf{e}_{i-j}^{(x)} ,$$

$\mathbf{e}_i^{(v)}$, $\mathbf{e}_i^{(x)}$, は i.i.d. 系列、$\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(v)}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(x)}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(v)} \mathbf{e}_i^{(v)\prime}) = \mathbf{\Sigma}_e^{(v)}$ (正定). $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(x)} \mathbf{e}_i^{(x)\prime}) = \mathbf{\Sigma}_e^{(x)}$ (非負定), 係数和の絶対値収束性を仮定

$\mathbf{f}_{\Delta x}(\mu)$, $\mathbf{f}_v(\mu)$ をそれぞれ $\Delta\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i$ $(i=1,\cdots,n)$ の $(p\times p)$ スペクトル密度行列

$$\mathbf{f}_{\Delta x}(\mu) = \frac{1}{\pi}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}_j^{(x)}e^{2\pi i\mu j}\Big)\mathbf{\Sigma}_e^{(x)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}_j^{(x)'}e^{-2\pi i\mu j}\Big)\quad \Big(-\frac{1}{2}\le\mu\le\frac{1}{2}\Big),$$

$$\mathbf{f}_{v}(\mu) = \frac{1}{\pi}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}_j^{(v)}e^{2\pi i\mu j}\Big)\mathbf{\Sigma}_e^{(v)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}_j^{(v)'}e^{-2\pi i\mu j}\Big)\quad \Big(-\frac{1}{2}\le\mu\le\frac{1}{2}\Big)$$

基準化 $\mathbf{C}_0^{(x)}=\mathbf{C}_0^{(s)}=\mathbf{C}_0^{(v)}=\mathbf{I}_p$, $i^2=-1$。階差変換 $\Delta\mathbf{y}_i\ (=\mathbf{y}_i-\mathbf{y}_{i-1})$ の $p\times p$ スペクトル密度行列

$$\mathbf{f}_{\Delta y}(\mu) = \mathbf{f}_{\Delta x}(\mu) + (1-e^{2\pi i\mu})f_v(\mu)(1-e^{-2\pi i\mu})\ .$$

各成分の長期分散共分散行列 $(g,h=1,\cdots,p)$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_x &= \mathbf{f}_{\Delta x}(0)\ (=(\omega_{gh}^{(x)}))\ ,\\ \mathbf{\Omega}_v &= f_v(0)\ = (\omega_{gh}^{(v)})\ .\end{aligned}$$

季節性を含む加法モデル

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{s}_i + \mathbf{v}_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

において正整数 s $(s > 1)$, N, $n = sN$ とした季節要素を $\mathbf{s}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ は $(1 + \mathcal{L} + \cdots + \mathcal{L}^{s-1})\mathbf{s}_i == \mathbf{v}_i^{(s)}$, を満足と仮定 (Kitagawa (2010), Kunitomo and Sato (2017)),

$$\mathbf{v}_i^{(s)} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_{js}^{(s)} \mathbf{e}_{i-sj}^{(s)} ,$$

$\mathbf{e}_i^{(s)}$ は i.i.d. 系列、$\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(s)}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(s)}\mathbf{e}_i^{(s)\prime}) = \boldsymbol{\Sigma}_e^{(s)}$、係数和の絶対値収束性を仮定する。
他の定式化, 例えば $(1 - \mathcal{L})\mathbf{s}_i$ が定常過程, あるいは Box-Jenkins の定式化なども可能。

例えば $(1-\mathcal{L})\mathbf{s}_i$ が定常過程との定式化なら $\mathbf{f}_{\Delta s}(\mu)$ を $\Delta\mathbf{s}_i$ の $(p\times p)$ スペクトル密度行列

$$\mathbf{f}_{\Delta s}(\mu)=\frac{1}{\pi}(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}_{sj}^{(s)}e^{2\pi i\mu sj})\mathbf{\Sigma}_e^{(s)}(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}_{sj}^{(s)\prime}e^{-2\pi i\mu sj})\quad(-\frac{1}{2}\leq\mu\leq\frac{1}{2}),$$

基準化 $\mathbf{C}_0^{(s)}=\mathbf{I}_p,\ i^2=-1$。階差変換 $\Delta\mathbf{y}_i\ (=\mathbf{y}_i-\mathbf{y}_{i-1})$ の $p\times p$ スペクトル密度行列

$$\mathbf{f}_{\Delta y}(\mu)=\mathbf{f}_{\Delta x}(\mu)+\mathbf{f}_{\Delta s}(\mu)+(1-e^{2\pi i\mu})f_v(\mu)(1-e^{-2\pi i\mu})\ .$$

長期分散共分散行列 $(g,h=1,\cdots,p)$ は

$$\mathbf{\Omega}_s=\mathbf{f}_{\Delta s}(\frac{1}{s})\ (=(\omega_{gh}^{(s)}))\ .$$

$\mathbf{K}_n$ 変換と $\mathbf{Z}_n$ 過程

データ行列に対して $\mathbf{K}_n$− 変換（$\mathbf{Y}_n$ より $\mathbf{Z}_n\;(=(\mathbf{z}_k'))$）は

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{K}_n\left(\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0\right)\;,\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n\mathbf{C}_n^{-1}\;,$$

により定義。ただし

$$\mathbf{C}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}\;,$$

$$\mathbf{P}_n = (p_{jk}^{(n)})\;,\; p_{jk}^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{n+\frac{1}{2}}}\cos\left[\frac{2\pi}{2n+1}(k-\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})\right]\;.$$

このときスペクトル分解により $\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{C}_n'^{-1} = \mathbf{P}_n\mathbf{D}_n\mathbf{P}_n'$ $\mathbf{D}_n$ は対角行列、第 (k,k) 要素は
$d_k = 2[1-\cos(\pi(\frac{2k-1}{2n+1}))] = 4\sin^2(\frac{\pi}{2}(\frac{2k-1}{2n+1}))\;(k=1,\cdots,n)$。

$\mathbf{K}_n-$ 変換された系列 $\mathbf{Z}_n$ に対するフィルタリングを考える。
$m \times n$ 選択行列 $\mathbf{J}_m = (\mathbf{I}_m, \mathbf{O})$ として $n \times p$ 行列

$$\hat{\mathbf{X}}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n^{'} \mathbf{J}_m^{'} \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

ただし

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

$n \times n$ 変換

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{J}_m^{'} \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \ .$$

次により一般の $\mathbf{K}_n-$ 変換された系列 $\mathbf{Z}_n$ に対するフィルタリングを考える。例えば季節性は離散時間の季節周期 $s\ (>1)$ と理解できる。$m_2 \times [m_1 + m_2 + (n - m_1 - m_2)]$ 選択行列 $\mathbf{J}_{m_1,m_2,n} = (\mathbf{O}, \mathbf{I}_{m_2}, \mathbf{O})$, $n \times p$ 行列

$$\hat{\mathbf{W}}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n^{'} \mathbf{J}_{m_1,m_2,n}^{'} \mathbf{J}_{m_1,m_2,n} \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

$n \times n$ 行列

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{J}_{m_1,m_2,n}^{'} \mathbf{J}_{m_1,m_2,n} \mathbf{P}_n \ .$$

を利用する。このとき $(j, j^{'})$-要素
$\mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{J}_{m_1,m_2,n}^{'} \mathbf{J}_{m_1,m_2,n} \mathbf{P}_n \ (= (q_{j,j^{'}}))$ は

$$q_{j,j} = \frac{2m_2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\sin\frac{2(m_1+m_2)\pi}{2n+1}(2j-1) - \sin\frac{2(m_1)\pi}{2n+1}(2j-1)}{\sin\frac{\pi}{2n+1}(2j-1)}\right],$$

$$q_{j,j^{'}} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\sin\frac{2(m_1 1+m_2)\pi}{2n+1}(j+j^{'}-1) - \sin\frac{2(m_1)\pi}{2n+1}(j+j^{'}-1)}{\sin\frac{\pi}{2n+1}(j+j^{'}-1)} + \frac{\sin\frac{2(m_1+m_2)\pi}{2n+1}(j-j^{'}) - \sin\frac{2(m_1)\pi}{2n+1}(j-j^{'})}{\sin\frac{\pi}{2n+1}(j-j^{'})}\right] \quad (j \neq j^{'}) .$$

データの直交分解

記号 $\theta_{jk} = \frac{2\pi}{2n+1}(j - \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})$,

$$p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}(e^{i\theta_{jk}} + e^{-i\theta_{jk}})$$

を利用して

$$\Delta_\lambda \mathbf{z}^{(n)}(\lambda_k^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} p_{jk}^{(n)} \mathbf{r}_j^{(n)} \ , \ \mathbf{r}_j^{(n)} = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1} \ ,$$

と表現すると、変換系列 $\mathbf{Z}_n$ はデータのある種の実フーリエ変換 $\Delta_\lambda \mathbf{z}^{(n)}(\lambda_k^{(n)})$ $(k = 1, \cdots, n)$ はデータの周波数 $\lambda_k^{(n)}$ $(= (k-1/2)/(2n+1))$, におけるフーリエ変換、データ直交増分過程である。

定理 5.1

(離散時間) 確率過程 $\mathbf{r}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ はエルゴード的定常過程、$\mathbf{\Gamma}(h) = \mathcal{E}(\mathbf{r}_j \mathbf{r}_{j-h}^{'})$ は

$$\sum_{h=0}^{\infty} \|\mathbf{\Gamma}(h)\| < \infty \ .$$

を満たす (有界性を)。

(i) $\Delta_\lambda \mathbf{z}^{(n)}(\lambda_k^{(n)}) = \sum_{j=1}^n p_{jk}^{(n)} \mathbf{r}_j^{(n)}$, $\mathbf{r}_j^{(n)}$ がエルゴード的定常過程で $\mathcal{E}[\mathbf{r}_j] = \mathbf{0}$, 対称化実スペクトル密度行列

$$\mathbf{f}_{SR}(\lambda) = \mathbf{\Gamma}(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \cos(2\pi h\lambda)[\mathbf{\Gamma}(h) + \mathbf{\Gamma}(-h)] \ ,$$

は正定符号、有界性を仮定。$\lambda_k^{(n)} \to s$, $\lambda_{k'}^{(n)} \to t (0 < s < t < \frac{1}{2})$. $n \longrightarrow \infty$ のとき

$$\begin{bmatrix} \Delta_\lambda \mathbf{z}^{(n)}(\lambda_k^{(n)}) \\ \Delta_\lambda \mathbf{z}^{(n)}(\lambda_{k'}^{(n)}) \end{bmatrix} \xrightarrow{w} N_{2p}\left[\mathbf{0}, [\begin{array}{cc} \mathbf{f}_{SR}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_{SR}(t) \end{array}]\right] \ .$$

(ii) 増分過程 $\mathbf{Z}_n(t) - \mathbf{Z}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=[sn]}^{[tn]} \sum_{j=1}^{n} p_{jk}^{(n)} \mathbf{r}_j^{(n)}$ $(0 < s < t < 1)$. $n \longrightarrow \infty$ のとき

$$\mathbf{Z}_n(t) - \mathbf{Z}_n(s) \xrightarrow{w} N_p\left[\mathbf{0}, F_{SR}(t) - F_{SR}(s)\right] \;,$$

ただし $F_{SR}(t)$ は $p \times p$ (対称化実) スペクトル分布行列

$$F_{SR}(t) = \int_0^t f_{SR}(\lambda) d\lambda \;.$$

で与えられる。

(実) スペクトル経験分布 (行列) は

$$\mathbf{F}_{SR,n}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k \le [2nt]} (\Delta_t \mathbf{z}_k^{(n)}(\lambda_k^{(n)}))(\Delta_t \mathbf{z}_k^{(n)}(\lambda_k^{(n)}))' \ .$$

となる。
KS(2017) における SIML 推定量は

$$\mathbf{G}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \Delta_0 \mathbf{z}_k^{(n)}(\lambda_k) \Delta_0 \mathbf{z}_k^{(n)}(\lambda_k)' \ .$$

より一般には

$$\mathbf{G}_m(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=[2nt]-\frac{m_n}{2}+1}^{[2nt]+\frac{m_n}{2}} (\Delta_t \mathbf{z}_k^{(n)}(\lambda_k^{(n)}))(\Delta_t \mathbf{z}_k^{(n)}(\lambda_k^{(n)}))' \ .$$

定理 5.2： (離散時間) 確率過程 $\mathbf{r}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ がエルゴード的定常過程、$\mathbf{\Gamma}(h) = \mathcal{E}(\mathbf{r}_j \mathbf{r}_{j-h}^{'})$ とする（有界性を仮定）。
(i) $m_n = [n^{\alpha}]$ $(0 < \alpha < 1)$ とおくと、任意の $t \in (0, \frac{1}{2})$ に対し $n \longrightarrow \infty$ のとき

$$\mathbf{G}_m(t) \xrightarrow{p} \mathbf{f}_{SR}(t)$$

(ii)$n \longrightarrow \infty$ のとき

$$\mathbf{F}_{SR,m}(t) \xrightarrow{p} \mathbf{F}_{SR}(t) \quad .$$

伝統的時系列論ではスペクトル分布 F を持つ定常 (離散時間) ベクトル過程 $\mathbf{r}_k^*$ に対して右連続な直交増分 (ベクトル, 複素数値) 過程 $\mathbf{z}^*(\lambda)$ $(-1/2 \leq \lambda \leq 1/2)$ が存在し、

$$\mathbf{r}_k^* = \int_{(-1/2,1/2]} e^{i2\pi ik\nu} d\mathbf{z}^*(\nu) \; (k = 1, \cdots, n).$$

と表現されることが知られている。(Doob (1953), Hannan (1971), Brockwell and Davis (1990).)

(今回のフィルタリング法)

本稿における実ベクトル値をとる確率過程 (理論値)

$$\mathbf{r}_k^{(u)} = \int_{(0,1/2]} \cos(2\pi k\nu) h_u(\cos(2\pi k\nu) d\mathbf{z}(\nu) \ (k = 1, \cdots, n)$$

$(u = x\ , u = s)$ に対する (離散時間) フィルタリング値は

$$\mathbf{r}_k^{(n,u)} = \int_{(0,1/2]} \cos(2\pi k\nu) h_{u,n}(\cos(2\pi k\nu) d\mathbf{z}_n(\nu) \ (k = 1, \cdots, n)$$

$(u = x\ , u = s)$ と表現される（$h(\cdot)$ はカーネル関数)。

- 多期間の予測誤差を最小化するような最適なカーネル選択法 $h_{u,n}(\cdot)$ を考察中
- 離散時間確率過程 $\Delta_\lambda \mathbf{z}^{(n)}(\lambda_k^{(n)})$ は右連続な直交増分 (ベクトル, 実数値) 過程 $\mathbf{z}^*(\lambda)$ $(-1/2 \leq \lambda \leq 1/2)$ に弱収束する：フィルタリングの理論的誤差評価を考察中

データの直交分解

幾つかのマクロ系列を利用して本稿で考察しているフィルタリング法の妥当性が高いことが分かった。伝統的な時系列解析では定常過程にもとづくスペクトル密度の推定に高い関心を示していたが、その方法では非定常系列では上手くいかない理由が明らかになる。また例えば Box-Jenkin 法で推奨されている季節階差法には基本的な問題がある、ことなどがここでの分析から分かる。ここでは幾つかのデータ分析の例示にとどめる。

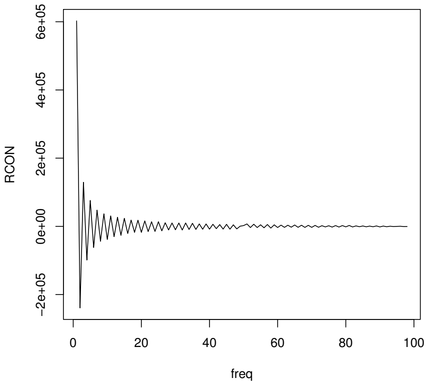

図 7.1：実質消費 (原系列)

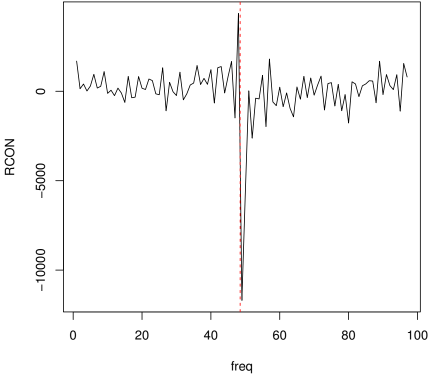

図 7.2： 実質消費 (階差系列)

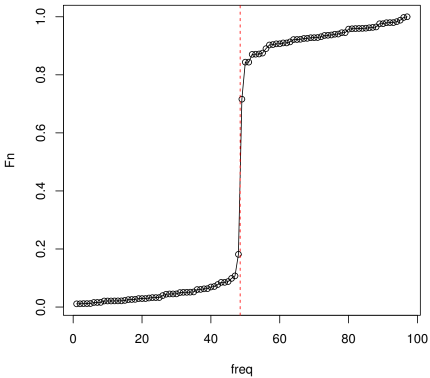

図 7.3： 実質消費 (経験スペクトル分布)

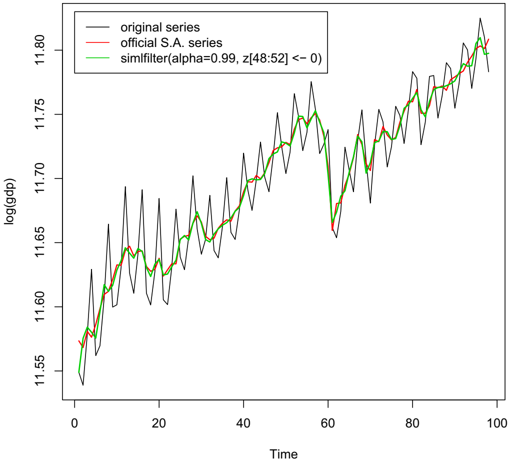
original series
official S.A. series
simlfilter(alpha=0.99, z[48:52] <− 0)
log(gdp)
11.55
11.60
11.65
11.70
11.75
11.80
0
20
40
60
80
100
Time

図 7.5：実質 GDP

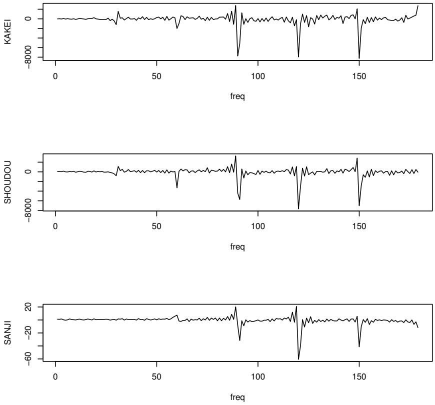
KAKEI
0
-8000
0
50
100
150
freq
SHOUDOU
0
-8000
0
50
100
150
freq
SANJI
20
-20
-60
0
50
100
150
freq

図 7.6 : 消費系列

Macro-SIML

Theorem 4.1 (Kunitomo-Sato, 2017) Assume that $\mathbf{w}_i^{(x)} = (w_{ji}^{(x)})$ and $\mathbf{v}_i = (v_{ji})$ are a sequence of independent random variables with $\mathcal{E}[w_{ig}^{(x)4}] < \infty$ and $\mathcal{E}[v_{ig}^4] < \infty$ $(i, j = 1, \cdots, n; g, h = 1, \cdots, p)$.
Then (i) For $m_n = [n^\alpha]$ and $0 < \alpha < 1$, as $n \longrightarrow \infty$

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_x - \mathbf{\Sigma}_x \xrightarrow{p} \mathbf{O} \ .$$

(ii) For $m_n = [n^\alpha]$ and $0 < \alpha < 0.8$, as $n \longrightarrow \infty$

$$\sqrt{m_n}\left[\hat{\sigma}_{gh}^{(x)} - \sigma_{gh}^{(x)}\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \sigma_{gg}^{(x)}\sigma_{hh}^{(x)} + \left[\sigma_{gh}^{(x)}\right]^2\right) \ .$$

The covariance of the limiting distributions of $\sqrt{m_n}[\hat{\sigma}_{gh}^{(x)} - \sigma_{gh}^{(x)}]$ and $\sqrt{m_n}[\hat{\sigma}_{kl}^{(x)} - \sigma_{kl}^{(x)}]$ is given by $\sigma_{gk}^{(x)}\sigma_{hl}^{(x)} + \sigma_{gl}^{(x)}\sigma_{hk}^{(x)}$ $(g, h, k, l = 1, \cdots, p)$.

非共和分 I(1) 時系列の推定

Table 1：Simulations (Direct LS)

n=	200	1000	30000
true	1.2000000	1.2000000	1.2000000
mean	2.20160362	2.2287208	2.091839
SD	0.09298806	0.2182666	1.489691

Table 2：Simulations (MW)

n=	200	1000	30000
true	1.2000000	1.2000000	1.2000000
mean	1.1417666	1.2128945	1.1875414
SD	0.5278531	0.5300892	0.5337179

Table 3：Simulations(SIML)

n=	200	1000	30000
true	1.2000000	1.2000000	1.2000000
mean	1.0827566	1.180712	1.20200982
SD	0.3277927	0.190392	0.07657053

まとめと展望

- 多くのマクロ経済データにおいては非定常性、季節性、定常的な循環、観測ノイズなどが観察される。応用上では例えば GDP 統計の季節調整・系列の合成 (内閣府)、複数のマクロ消費系列から総合指標の作成 (統計局) など、幾つかの重要な問題がある。これまでよく利用されている季節調整法の X-12-ARIMA、DECOMP、VAR による共和分分析などはいずれも改善が必要である。
- 本稿では多次元非定常時系列の分布にあまり依存しないマクロ SIML 法にもとづく新しいフィルタリング法を開発した。計測誤差を含む多次元非定常系列の実務的課題、例えば、トレンド抽出、トレンド間の回帰、季節調整、季節性間の回帰、集計系列の合成、などへの応用可能性は広範と考えられる。

References

- Akaike, H. (1973), "Information Theory and an extension of the maximum likelihood principle," 2nd International Symposium on Information Theory, B.N. Petrov and F. Csaki edited, Academiai Kiado, Budapest, 267-281.
- Anderson, T.W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, John-Wiley.
- Harvey, A. and T. Trimbur (2008), "Trend Estimation and The Hodorick-Prescott Filter," J. Japan Statistical Society, 38-1, 41-49.
- Kitagawa, G. (2010), *Introduction to Time Series Analysis*, CRC Press.
- Baxter, M. and G. King (1999) ,"Measuring Busines Cycles : Approximate Band-Path Filters for Econimc Time Series," *Review of Economics and Statistics*, 81-4, 575-593.
- Hodrick, R.J and K.J. Prescott (1997), "Postwar US Business Cycles : An Empirical Inveatigation," *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, 1-16.
- Kunitomo, N. , Sato and D. Kurisu (2018), *Separating Information Maximum Likelihood Estimation for High Frequency Financial Data*, Springer.

- Kunitomo, N. and S. Sato (2017), "Trend, Seasonality and Economic Time Series : the Non-stationary Errors-in-variables Models," SDS-4, MIMS, Meiji University, http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/2017-ds.
- Kunitomo, N., N. Awaya and D. Kurisu (2019), "Some Properties of Estimation Methods for Structural Relationships in Non-stationary Errors-in-Variables Models," *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, Springer, **Open Access**.
- Kunitomo, N. and S. Sato (2019), "A Robust-filtering Method for Noisy Non-Stationary Time Series," SDS-9, MIMS, Meiji University,
- Müller, U. and M. Watson (2018), "Long-run Covariability," *Econometrica*, 86-3, 775-804.
- Nishimura, G. K., Seisho Sato, Akihiko Takahashi (2019), "Term Structure Models During the Global Financial Crisis: A Parsimonious Text *Asic-Pacific Financial Markets*.